Л. В. Веселова

Казань

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ БИЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Порядково интерполяционной парой $\overline{X} = (X_0, X_1)$ назовем пару банаховых пространств (X_0, X_1) с порождающими замкнутыми конусами X_0^+, X_1^+, алгебраически и топологически вложенных в отделимое топологическое векторное пространство W с замкнутым конусом W^+, причем $X^+{}_i \subset W^+$ $(i = 0, 1)$. Через $\Delta(\overline{X}) = X_0 \cap X_1$ обозначим пересечение, через $\Sigma(\overline{X}) = X_0 + X_1$ — сумму пространств банаховой пары $\overline{X}$.

Пусть теперь $\overline{X} = (X_0, X_1)$, $\overline{Y} = (Y_0, Y_1)$, $\overline{Z} = (Z_0, Z_1)$ — порядково интерполяционные пары с конусами X_i^+ Y_i^+, Z_i^+ $(i = 0, 1)$ соответственно. Билинейный оператор $B : \Sigma(\overline{X}) \times \Sigma(\overline{Y}) \longrightarrow \Sigma(\overline{Z})$ назовем положительным, если $B : X_i^+ \times Y_i^+ \longrightarrow Z_i^+$ $(i = 0, 1)$ и существуют константы $c_i > 0$, такие, что $||B(x, y)||_{Z_i} \leqslant c_i ||x||_{X_i} ||y||_{Y_i}$ для любых $x \in X_i$, $y \in Y_i$ $(i = 0, 1)$. Множество таких операторов обозначим через $B^+(\Sigma(\overline{X}) \times \Sigma(\overline{Y}),\ \Sigma(\overline{Z}))$.

Набор пространств $(\overline{X}, \overline{Y}, X, Y)$ назовем интерполяционным для положительных билинейных операторов относительно набора $(\overline{Z}, Z)$, если любой оператор B из $B^+(\Sigma(\overline{X}) \times \Sigma(\overline{Y}), \Sigma(\overline{Z}))$ переводит $X \times Y$ в Z и существует константа $c > 0$, такая, что $||B(x, y)||_Z < c||x||_X ||y||_Y$ для любых $x \in X$, $y \in Y$.

Приведем один метод построения наборов, интерполяционных для положительных билинейных операторов. Для банахова пространства X через $E(X, X^+)$ обозначим линейное подпространство в X, порожденное конусом X^+, с нормой

$$\|x\|_{E(X,X^+)} = \inf\{\|x'\|_X + \|x''\|_X : x', x'' \in X^+, x = x' - x''\}.$$

Пусть $X \subset \Sigma(\overline{X})$, $Y \subset \Sigma(\overline{Y})$, $Z \subset \Sigma(\overline{Z})$ с замкнутыми конусами $X^+ \subset X_0^+ + X_1^+$, $Y^+ \subset Y_0^+ + Y_1^+$, $Z^+ \subset Z_0^+ + Z_1^+$ соответственно и набор $(\overline{X}, \overline{Y}, X, Y)$ интерполяционен для билинейных операторов относительно набора $(\overline{Z}, Z)$.

Теорема. *Если любой оператор B из $B^+(\Sigma(\overline{X}) \times \Sigma(\overline{Y}), \Sigma(\overline{Z}))$ переводит $X^+ \times Y^+$ в Z^+, то набор пространств $(\overline{X}, \overline{Y}, X, Y)$ интерполяционен для положительных билинейных операторов относительно набора $(\overline{Z}, Z)$.*

В частности, из теоремы следует, что пространство конического пересечения $D(\overline{X}) = E(X_0 \cap X_1, X_0^+ \cap X_1^+)$, введенное в [1], интерполяционно для положительных билинейных операторов. Там же приведен пример, показывающий, что это пространство не интерполяционно для всех билинейных операторов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Веселова Л. В., Сукочев Ф. А., Тихонов О. Е. *Интерполяция положительных операторов* // Матем. заметки. – 2007. – Т. 81. – № 1.